

ESAME DI STATO CONCLUSIVO DEI PERCORSI DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Prove scritte di Italiano e Matematica
a.s. 2009-2010

ELEMENTI DALLA PROVA DI MATEMATICA
PER L'ANALISI DELLE COMPETENZE LINGUISTICHE



INVALSI

Marzo 2012

Il gruppo di lavoro su “Esame di Stato II ciclo. Rilevazione degli Apprendimenti. Prove scritte di italiano e matematica” è coordinato da: Lina Grossi (responsabile del progetto)

Il presente rapporto è stato redatto da: Giorgio Bolondi, Laura Branchetti, Federica Ferretti.

Per l'INVALSI hanno collaborato: Carlo Di Chiacchio (ricercatore INVALSI) e Paola Giangiacomo (ricercatrice INVALSI) per l'analisi psicometrica.

Hanno collaborato alla realizzazione di questo lavoro i partecipanti al Laboratorio di Didattica della Matematica dell'Università degli Studi di Bologna: CHIARA AMADORI, STEFANIA BARBERINI, SARA BARUZZI, MARIALETIZIA BERTUCCIOLI, FRANCESCO MARIA BIANCHI, TERESA BLANCO, SARA CALANDRINI, LUCA CASOLI, FABIANA CINTI, ELEONORA DALLAGIACOMA, MARTA FAGIOLI, CHIARA FELETTI, GIACOMO FERRARI, LUCIA GIAMPAOLI, CHIARA GIBERTI, GIORGIA LAGHI, ROBERTO LUZI, LUCIA MERCURI, MARIANNA MUNDO, MARIANNA NICOLETTI, GIUSEPPE SICILIANO, NOEMI SPONTICCIA, ANDREA TASINI, DANIELA TOMMASSONI.

A loro si deve il lavoro di correzione e di rilevamento attraverso le maschere.

Gli autori ringraziano il prof. Bruno D'Amore e la prof.ssa Martha Isabel Fandiño Pinilla per i consigli e i suggerimenti forniti generosamente durante la preparazione del presente rapporto.

L'immagine Nürnberger Trichter (1647) è tratta da: <http://education.net/thehistoryofeducation.htm>

INDICE

INTRODUZIONE	4
PARTE PRIMA	
PRESENTAZIONE DELL'INDAGINE (G.Bolondi, L.Branchetti, F.Ferretti)	
1. La prova di matematica nell'esame di Stato per i Licei Scientifici	6
1.1 Prove e caratteristiche dell'esame di Stato	6
1.2 La seconda prova di matematica secondo la normativa	7
2. Il Quadro di Riferimento	9
2.1 Matematica, competenze linguistiche, competenze comunicative	9
2.2 Le "capacità logiche e argomentative"	11
3. L'apparato di indagine	13
3.1 Le maschere e gli evidenziatori	13
3.2 I correttori	14
PARTE SECONDA	
GLI INDICATORI DELLA RILEVAZIONE: CARATTERISTICHE E RISULTATI (L.Branchetti)	
1. Le caratteristiche delle strumenti di ricorrenza	16
1.1 Le maschere analitiche	16
1.2 Le maschere trasversali- competenza testuale	17
1.3 Le maschere trasversali- competenza grammaticale	18
1.4 Le maschere trasversali- competenza lessicale-semantica	18
1.5 Gli indicatori riassuntivi	19
1.6 Il lavoro sugli elaborati	20
2. I primi risultati	21
3. Prime osservazioni sui risultati	22
PARTE TERZA	
LE SCELTE DEGLI STUDENTI (F. Ferretti)	
1. La distribuzione delle scelte	27
2. Le scelte degli studenti e le competenze trasversali	31
3. Analisi di un caso: il quesito Q6 del compito di ordinamento	33
PARTE QUARTA	
I MATERIALI	
Il compito dell'Esame di Stato 2009/10 per i Licei scientifici di Ordinamento	36
La maschera di correzione per i Licei di Ordinamento	37
Il compito dell'Esame di Stato 2009/10 per i Licei scientifici sperimentali e PNI	46
La maschera di correzione per i Licei PNI	47
La maschera trasversale	56

Introduzione

Questo rapporto presenta i materiali e i primi risultati del lavoro di analisi compiuto su un campione di elaborati delle seconde prove di Matematica degli studenti dei Licei Scientifici, in correlazione con gli elaborati delle prime prove dell'esame di Stato conclusivo del secondo ciclo, raccolti nella sessione 2010.

Il rapporto contiene in particolare:

- la presentazione dei materiali utilizzati
- la descrizione delle procedure di ricorrezione
- una prima presentazione dei risultati per gli elaborati di matematica
- alcuni commenti ai risultati.

Il rapporto è strutturato in quattro parti.

La parte prima, che presenta l'indagine e i risultati, espone i problemi affrontati e il quadro di riferimento in base al quale è stato disegnato l'apparato di rilevamento e sono stati predisposti i materiali.

La parte seconda presenta in dettaglio i materiali, in particolare le maschere di ricorrezione, e i primi risultati.

La parte terza contiene un'analisi dei risultati, con particolare riguardo alle diverse scelte operate dagli studenti.

La parte quarta raccoglie i materiali utilizzati.

Una appendice apposita raccoglierà le analisi statistiche.

I risultati che vengono presentati riguardano l'analisi condotta sugli elaborati di Matematica. Insieme ai risultati riguardanti gli elaborati di Italiano e alle elaborazioni statistiche circa le correlazioni, tali risultati forniscono il materiale per uno studio unitario, che è l'obiettivo principale del progetto, in cui le competenze linguistiche dei ragazzi vengono indagate anche attraverso la prova di Matematica. Questo fornirà anche informazioni riguardo a come queste competenze interagiscono con l'apprendimento della matematica, così come valutabile attraverso la prova dell'esame di Stato.

PARTE PRIMA
PRESENTAZIONE DELL'INDAGINE

(G.Bolondi, L.Branchetti, F.Ferretti)

1. La prova di matematica nell'esame di Stato per i Licei Scientifici

1.1 Prove e caratteristiche dell'esame di Stato¹

L'esame di Stato² prevede due prove scritte a carattere nazionale, una terza prova scritta elaborata a livello di singola classe ed una prova orale. La prima prova scritta è di italiano ed è uguale per tutti gli indirizzi di studio; la seconda ha come oggetto materie diverse, in base all'indirizzo di studio; la terza è a carattere multidisciplinare. La prova orale comprende anche la presentazione di un lavoro personale.

La commissione è mista (il numero di commissari interni è pari a quello dei commissari esterni) mentre il Presidente è esterno. La correzione delle prove è stata svolta dalla commissione presso la sede della scuola.

In base alla legge n. 1 dell'11 gennaio 2007 il punteggio in centesimi, è così distribuito:

- il credito scolastico è pari a 25 punti e viene attribuito sulla base della media dei voti conseguiti nell'arco dell'ultimo triennio³;
- per le tre prove scritte il totale è di 45 punti, tripartiti in ugual misura tra le prove. A ciascuna delle prove scritte giudicata sufficiente non può essere attribuito un punteggio inferiore a 10;
- per il colloquio orale, il punteggio massimo è di 30;
- un bonus di 5 punti può essere attribuito ai candidati che abbiano ottenuto un credito scolastico di almeno 15 punti (su un massimo di 25) e un risultato complessivo della prova

¹Questa sezione descrittiva è ripresa parzialmente dal rapporto *La prova di matematica nell'Esame di Stato*. In: Invalsi, *Rapporto: Esame di Stato Conclusivo dei percorsi di istruzione secondaria superiore. Prime analisi. Prova di matematica*.

http://www.invalsi.it/download/rapporti/Eds0809/INVALSI_RAPPORTOMATEMATICA.pdf

²Cfr. il sito del MIUR sugli esami di Stato:

<http://archivio.pubblica.istruzione.it/argomenti/esamedistato/home.html>.

³La tabella A - *Credito scolastico. Candidati interni* - allegata alla legge, contiene indicazioni precise per l'attribuzione dei punteggi. Nella nota di accompagnamento si sottolinea che, nell'attribuzione del credito, si deve tenere conto anche dell'assiduità della frequenza scolastica, dell'interesse e dell'impegno nella partecipazione al dialogo educativo.

di esame pari almeno a 70 punti (su un massimo di 75: 45 punti per le prove scritte e 30 punti per il colloquio orale).

- a coloro che conseguono il punteggio massimo di 100 punti senza fruire della predetta integrazione può essere attribuita la lode dalla commissione⁴.

Il punteggio minimo complessivo per superare l'esame è di 60/100.

Nella certificazione rilasciata per il superamento degli esami di Stato (D.M. N. 26/2009) si attestano⁵: a) l'indirizzo e la durata del corso di studi, le materie di insegnamento comprese nel curriculum degli studi con l'indicazione delle ore complessive destinate a ciascuna; b) la votazione complessiva dell'esame di Stato, la somma dei punti attribuiti alle tre prove scritte, il voto del colloquio orale, l'eventuale punteggio aggiuntivo, il credito scolastico, i crediti formativi documentati; c) le ulteriori specificazioni valutative della commissione, con riguardo anche a prove sostenute con esito particolarmente positivo; d) la menzione della lode, di seguito all'indicazione del voto, qualora attribuita dalla Commissione di esame.

1.2 La seconda prova di matematica secondo la normativa

In base alle norme definite dalla riforma degli esami di Stato conclusivi dei corsi di studio di istruzione secondaria superiore, entrata in vigore nel 1999, in applicazione della legge n. 425 del 10 dicembre 1997, la seconda prova scritta *“ha oggetto una delle materie caratterizzanti il corso di studio per le quali l'ordinamento vigente prevede verifiche scritte”* (art. 3 *“Contenuto ed esito dell'esame”*). Questo, di fatto, ha limitato praticamente ai soli Licei scientifici la presenza di una seconda prova scritta di matematica.

Successive disposizioni⁶ hanno indicato, per quanto riguarda la struttura della prova, la seguente articolazione: *“Il testo è costituito da due problemi (articolati al loro interno in almeno tre quesiti, possibilmente indipendenti tra loro) e un questionario contenente altri quesiti (da un minimo di 6 a un massimo di 10) riguardati argomenti del programma. La tipologia delle questioni poste è tale da offrire al candidato le più ampie opportunità di esprimere conoscenze, competenze e capacità acquisite nel corso degli*

⁴In base al nuovo *Regolamento per la valutazione degli studenti*, entrato in vigore nell'anno scolastico 2009-2010, sono ammessi agli esami di Stato soltanto gli studenti che, nello scrutinio finale, abbiano conseguito una votazione non inferiore a 6 in tutte le materie e in condotta..

⁵Il modello è reperibile sul sito del MIUR: http://www.istruzione.it/web/istruzione/dm26_09.

⁶Il Ministero della Pubblica Istruzione, il 4 ottobre 2000, ha pubblicato sul proprio sito Internet notizia della nuova struttura della seconda prova di matematica. Si veda in proposito:

<http://archivio.invalsi.it/ones2000/pagine/mat2prova.htm>.

studi. Lo studente sarà tenuto a risolvere uno dei due problemi proposti a scelta e circa la metà dei quesiti del questionario."

Per quanto riguarda tempi e materiali, viene specificato che *"la durata massima della prova è 6 ore. Nel corso della prova è consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili"*, di seguito si dettagliano ulteriormente le caratteristiche della prova di matematica (Riquadro 1).

Sulla base di quanto previsto dalla normativa a partire dall'anno scolastico 2000-2001, gli estensori delle prove hanno optato per l'a.s. 2009-2010, come avvenuto sempre anche in passato, per il numero massimo di quesiti, 10, e indicato di rispondere a 5 di essi. Per ciascuno 4 problemi (2 nel compito di ordinamento, e due in quello PNI) erano proposte 4 domande. La presenza di un problema e di 5 quesiti da svolgere in 6 ore risponde all'esigenza di avere una valutazione completa dell'alunno, lungo le tre direzioni più volte indicate. La legge non specifica che peso devono avere rispettivamente il problema e i quesiti nella valutazione del compito e successivamente nella determinazione della votazione. In genere le commissioni tendono ad assegnarvi peso equivalente, ma esistono anche prassi differenti (talvolta in maniera sostanziale), come emerso anche a margine della ricorrenza dell'esame di Stato dell'a.s. 2006-2007⁷. In particolare, va tenuto presente che è del tutto naturale che vi siano quesiti da cui evincere principalmente la consistenza di specifiche conoscenze, altri da cui rilevare se il ragazzo è in grado di argomentare, altri in cui si evidenzia la capacità di eseguire una determinata procedura. È quindi *l'insieme* della prova che è funzionale a valutare le diverse componenti dell'apprendimento come indicato dalla legge; il problema e i singoli quesiti concorrono in maniera *complementare* alla valutazione.

Occorre anche notare che il Ministero, a differenza di quanto avviene con la prova nazionale dell'esame di Stato conclusivo del primo ciclo di istruzione, non fornisce le soluzioni dei quesiti o comunque una griglia di correzione. Non indica neppure la natura o il livello di competenze, conoscenze o capacità che ogni singolo quesito vuole accertare, lasciando completa autonomia di valutazione alla commissione che stabilisce se e quando un quesito è risolto completamente e il peso e la funzione di ogni singola domanda.

⁷La prova di matematica nell'Esame di Stato. Raccolta materiali e analisi dei dati. Sessione d'esame 2007. Gruppo di Lavoro U.M.I.-INVALSI, http://www.invalsi.it/download/matematica_prova2007.pdf.

Per la seconda prova scritta di matematica dell'esame di Stato dell'a.s. 2009-2010 per i Licei scientifici il Ministero ha predisposto due tipologie di compito: una destinata ai corsi di ordinamento, e una ai corsi sperimentali a indirizzo PNI (Piano Nazionale Informatica). I quesiti 1, 2, 8 e 9 erano comuni ai due compiti, mentre il quesito 10 riguardava la stessa situazione ma veniva proposto in forma di quesito a risposta aperta nel compito di ordinamento e di quesito a risposta chiusa con richiesta di giustificazione nel compito PNI.

2. Il Quadro di Riferimento

2.1 Matematica, competenze linguistiche, competenze comunicative

La raccolta di materiali relativi all'Esame di Stato 2010 è stata realizzata in modo da acquisire, per gli studenti dei licei scientifici, sia gli elaborati della prima prova (Italiano) che quelli della seconda prova (Matematica). C'è quindi la possibilità, per la prima volta su un campione così ampio e rappresentativo, di analizzare le competenze dei candidati su due terreni molto impegnativi e, per certi versi, distanti.

Questa possibilità è interessante perché è opinione largamente diffusa che molte difficoltà in matematica (e simmetricamente molti aspetti di riuscita nell'apprendimento della matematica) dipendano da aspetti trasversali di competenza, e anzi possano essere in qualche modo collegabili (e forse correlabili) ad aspetti specifici della competenza linguistica.

Analizzando i risultati delle ricerche e delle diverse indagini sugli apprendimenti in matematica, nazionali e internazionali⁸, si evidenziano problemi diffusi sia nei processi di lettura che in quelli di produzione. Nei processi di lettura di un testo scientifico, si rilevano difficoltà derivanti dalla lettura di testi discontinui o di testi che utilizzano diversi registri semiotici; difficoltà nell'individuazione dei dati e nella loro interpretazione; difficoltà nella costruzione di collegamenti tra le informazioni. Nei processi di produzione di rilevano difficoltà nella costruzione di un testo argomentativo, nell'utilizzo del linguaggio tecnico, nell'uso del lessico, nella coerenza

⁸Cfr. ad es. *La prova di matematica nell'Esame di Stato. Raccolta materiali e analisi dei dati. Sessione d'esame 2007.* Gruppo di Lavoro U.M.I.-INVALSI, http://www.invalsi.it/download/matematica_prova2007.pdf;
La prova di matematica nell'Esame di Stato. In: Invalsi, *Rapporto: Esame di Stato Conclusivo dei percorsi di istruzione secondaria superiore. Prime analisi. Prova di matematica.*
http://www.invalsi.it/download/rapporti/Eds0809/INVALSI_RAPPORTOMATEMATICA.pdf
e, per qualche esempio esplicito, G: Bolondi, *Come usare in classe le prove Invalsi. L'Insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 33 A-B (6), pp. 686-701.

tra linguaggio naturale e linguaggio specifico, nell'uso dei registri specifici della matematica.

Un problema generale della ricerca in didattica della matematica è comprendere la natura, la struttura e l'organizzazione degli apprendimenti in matematica dei ragazzi. Un risultato considerato particolarmente importante, emergente dal percorso di apprendimento, è costituito proprio dall'acquisizione di queste capacità/competenze trasversali, e in particolare di quelle collegate alla capacità di argomentare. Queste competenze trasversali inoltre permettono di aggregare le diverse componenti dell'apprendimento e ne costituiscono in qualche modo un elemento strutturante.

La *componente comunicativa* dell'apprendimento è attualmente oggetto di studi e ricerche in molti paesi⁹. Il Quadro di Riferimento di OCSE-PISA, la più importante indagine internazionale sugli apprendimenti in matematica, individua nel *comunicare* una delle sette capacità fondamentali **intorno alle quali tutta l'indagine è costruita:**

*Communication: Mathematical literacy involves communication. The individual perceives the existence of some challenge and is stimulated to recognize and understand a problem situation. Reading, decoding and interpreting statements, questions, tasks or objects enables the individual to form a mental model of the situation which is an important step in understanding, clarifying and formulating a problem. During the solution process, intermediate results may need to be summarized and presented. Later on, once a solution has been found, the problem solver may need to present the solution, and perhaps an explanation or justification, to others*¹⁰

In particolare, nel ciclo della matematizzazione, la capacità comunicativa interviene in tre momenti. Nella fase di *formulazione* del problema, si esplicita nel leggere, decodificare e dare senso alle affermazioni, alle domande, alle consegne, agli oggetti, alle immagini, alle animazioni, al fine di costruire un modello mentale della situazione. Nella fase di *utilizzo* della matematica, si esplicita nell' articolare una soluzione, nel mostrare il lavoro coinvolto nel raggiungimento della soluzione, nel riassumere e presentare risultati intermedi. Nella fase di *interpretazione* dei risultati, si esplicita nel costruire e comunicare spiegazioni e argomentazioni nel contesto del problema.

Questi processi associati alla lettura -decodifica, interpretazione, riconoscimento, sintetizzazione, presentazione, spiegazione, giustificazione- sono chiaramente collegati alla

9M. I. Fandiño Pinilla, *Molteplici aspetti dell'apprendimento della matematica*. Gardolo (2008), Ed. Erickson

10 OCSE-Pisa, *Mathematics framework 2012*, <http://www.oecd.org/dataoecd/8/38/46961598.pdf>

competenza linguistica in senso ampio. Per comprendere meglio questa componente fondamentale dell'apprendimento matematico è dunque necessario indagare su aspetti strutturali della competenza linguistica, così come si presentano nell'attività matematica dei ragazzi. In questo senso, i materiali raccolti dall'INVALSI sono di altissimo interesse.

La prova scritta di matematica nell'esame di Stato del liceo scientifico è il momento più avanzato di valutazione, per la matematica, nella scuola italiana. Si rivolge agli studenti che hanno il percorso con il maggior numero di ore di matematica e con i curricoli più impegnativi ed è una prova *high stake*, nella quale i candidati possono ottenere 15 punti su 100 complessivi. Altri 15 punti sono attribuiti in base alla prova di Italiano. Sono quindi prove in cui i ragazzi si impegnano al massimo e hanno a disposizione un tempo molto ampio (6 ore per ciascuna prova), nel quale possono lavorare in modo accurato.

Per gli studenti di un campione rappresentativo per macroarea geografica e per genere sono disponibili una serie di dati di contesto (percorso scolastico, votazione attribuita in sede d'esame...) e gli elaborati della prima prova (italiano) e della seconda prova (matematica) dell'esame di stato del 2010. Questi elaborati, per la matematica, sono spesso lunghi e articolati. Sono quindi a disposizione della ricerca produzioni di testi matematici ampie, su consegne impegnative, e per ciascuno studente è disponibile una produzione analoga su una prova di Italiano.

2.2 Le “capacità logiche e argomentative”

Come si è detto, la normativa prevede che la prova di Matematica valuti la conoscenza di concetti e procedure, la competenza nell'applicarle e le capacità logiche e argomentative. Queste ultime appaiono particolarmente critiche: come si possono rilevare e valutare? Non sembrano esistere dei criteri condivisi e vengono abitualmente valutate in maniera sintetica e globale, per come emergono dal complesso dei prodotti del candidato. D'altra parte, è generalmente accettata l'idea che queste *capacità* siano manifestazione di competenze trasversali, o quanto meno siano ad esse correlate, e costituiscano un nucleo formativo profondo del percorso di matematica. Ai ricercatori, ai decisori, alla scuola nel suo insieme e a ogni singolo insegnante si pongono quindi le seguenti domande:

- c'è convergenza, tra gli insegnanti, su cosa si intende per “capacità logiche e argomentative”?
- esistono indicatori condivisi di tali capacità?
- quali strumenti di rilevazione sono necessari?

- su che scala o spazio può essere riportata una valutazione di queste capacità?
- è possibile specificare in particolare quale livello di tali capacità è specificamente richiesto nell'esame di Stato?

Si riscontrano casi in letteratura in cui insegnanti diversi giudicano in maniera estremamente discordi, talvolta esattamente opposta, elaborati prodotti dagli stessi studenti. Infatti, a parità di oggetto da esaminare, interviene significativamente l'interpretazione dell'insegnante¹¹. Fenomeni analoghi sono stati rilevati anche, specificamente, nelle precedenti rilevazioni condotte dall'INVALSI sulle prove scritte dell'esame di Stato.

Sempre il *framework* dell'indagine OCSE-PISA 2012 individua nel *Ragionare e argomentare* un'altra delle capacità fondamentali, e così la descrive:

Reasoning and argument: A mathematical ability that is called on throughout the different stages and activities associated with *mathematical literacy* is referred to as *Reasoning and argument*. This capability involves rooted thought processes that explore and link problem elements so as to make inferences from them, check a justification that is given, or provide a justification of statements of solutions to problems¹².

Anche questa capacità si esplicita nelle diverse fasi del ciclo della matematizzazione, in particolare nel fornire, spiegare e difendere giustificazioni dei propri modelli, delle strategie risolutive e delle soluzioni trovate, nel collegare informazioni, nell'organizzare argomentazioni articolate in più fasi, nel riconoscere una soluzione corretta.

Costituiscono poi parte della costruzione di un corretto discorso matematico (in cui la capacità di argomentare si esplicita attraverso la capacità comunicativa) anche la capacità di usare simboli e diagrammi, il linguaggio formale, e in generale tutta una serie di elementi tipici del linguaggio della matematica. È evidente quindi la complessità del problema racchiuso nell'espressione "valutare le capacità logiche e argomentative".

Questo lavoro di indagine cerca di fornire alcuni primi elementi per una riflessione sugli elaborati degli studenti, con l'intento di trovare modi e strumenti per individuare e valutare tali

11 Sembra necessaria, per una comprensione della situazione di fatto e del suo impatto sulla valutazione effettiva effettuata, una ricerca alla luce dell'idea di *convinzioni* degli insegnanti. Per un quadro del problema e una bibliografia esaustiva si veda B.D'Amore, M.I. Fandiño Pinilla, *Cambi di convinzione in insegnanti di matematica di scuola secondaria superiore in formazione iniziale*. In: *La matematica e la sua didattica*, 3 (2004), 27-50.

12 OCSE-Pisa, *Mathematics framework 2012*, <http://www.oecd.org/dataoecd/8/38/46961598.pdf>

capacità, e per permettere una valutazione complessiva meno superficiale, soprattutto in un momento forte e riassuntivo di tutto il percorso scolastico come l'esame di Stato.

3. L'apparato di indagine

3.1 Le maschere e gli evidenziatori

Lo strumento principale utilizzato in questo progetto è stato la *maschera di ricorrezione*¹³, di cui è stata predisposta una versione per il compito di ordinamento e una per il compito PNI, attraverso la quale "fotografare" gli elaborati campionati. Tale strumento è stato messo a punto attraverso la collaborazione dell'INVALSI con l'Unione Matematica Italiana nelle indagini precedenti (Esami di Stato 2006-2007 e 2008-2009). A partire da queste esperienze, le maschere applicate alle prove 2010 sono un tentativo di discretizzare, attraverso un centinaio di item, le risposte agli elaborati, con una particolare attenzione agli aspetti testuali, logici e argomentativi. Per rilevare le competenze dello studente su questi aspetti - ancora parzialmente inesplorati e *focus* principale di questo progetto - sono state predisposte alcune domande specifiche, sia locali (riferite alle domande del problema e ad ogni singolo quesito) sia globali (riferite al compito nel suo complesso). La costruzione delle maschere è stata realizzata partendo dalla griglia di rilevazione predisposta per la prova di Italiano. Più che cercare analogie facili ci si è concentrati sugli elementi strutturali e caratteristici della scrittura matematica, in particolare quando questa include esplicitamente argomentazioni, dimostrazioni, giustificazioni.

In parallelo all'apparato predisposto per la prova di Italiano, è stata anche definita una modalità di correzione dell'elaborato di matematica che utilizzasse evidenziatori di diversi colori. I correttori dovevano intervenire sugli elaborati con un sistema di *messa in evidenza* di presenze o assenze significative di elementi chiave delle procedure logiche e argomentative, anche per individuare gli errori più frequenti.

La descrizione dettagliata delle maschere e della correzione *multicolor* è in una sezione apposita.

¹³Le maschere sono state predisposte dagli autori del presente rapporto, che hanno disegnato tutto l'apparato d'indagine per la matematica. Le maschere analitiche per i compiti di ordinamento e PNI sono state realizzate sul modello elaborato per le precedenti ricorrezioni, anche per garantire coerenza tra i risultati diverse indagini. La maschera trasversale è stata elaborata *ex novo*.

3.2 I correttori

Il lavoro di correzione e rilevamento è stato affidato a 24 correttori, laureati in matematica e partecipanti a un laboratorio di Didattica della Matematica del Corso di Laurea magistrale in Didattica della Matematica dell'Alma Mater Studiorum-Università degli Studi di Bologna. Il laboratorio era diretto dal prof. G. Bolondi e tutto il lavoro è stato guidato e assistito dalla dott.ssa Laura Branchetti e dalla dott.ssa Federica Ferretti.

La formazione preliminare dei correttori si è articolata in due diverse fasi. La prima ha richiesto l'analisi delle prove proposte dal MIUR, la discussione delle possibili soluzioni (anche discutendo i materiali elaborati da diverse associazioni, forum, gruppi di insegnanti dopo lo svolgimento dell'esame di Stato), l'individuazione delle caratteristiche valutative e delle criticità di ciascun quesito. Questo lavoro ha permesso anche di iniziare a classificare i comportamenti più diffusi degli studenti. La seconda fase si è sviluppata attorno alle maschere: sono state discusse le singole voci, per chiarirne e condividerne il senso e arrivare, anche attraverso esempi espliciti, ad avere un criterio comune di rilevamento.

I correttori hanno lavorato a coppie e ogni coppia ha ricorretto una decina circa di elaborati, comprendenti proporzionalmente compiti delle due tipologie. Tutto il lavoro si è svolto in compresenza, in modo da poter analizzare e discutere con tutto il gruppo i casi dubbi. I risultati sono stati inseriti in un *database* per permetterne l'analisi statistica.

Non è stato richiesto di attribuire un voto agli elaborati: l'indagine si concentrava infatti solo su uno degli aspetti che la normativa prevede di valutare.

PARTE SECONDA
GLI INDICATORI DELLA RILEVAZIONE:
CARATTERISTICHE E RISULTATI

(L. Branchetti)

1. Le caratteristiche delle strumenti di ricorrezione

1.1 Le maschere analitiche

Le maschere di correzione fornite ai correttori per rilevare le competenze degli studenti erano strutturate in modo da suddividere l'analisi in due fasi distinte.

Per ciascuna delle prove (compito di Ordinamento e compito Sperimentale-PNI) è stata predisposta una maschera, elaborata sul modello predisposto per le ricorrezioni precedenti. Queste maschere prevedono un rilevamento puntuale, domanda per domanda, dei principali passaggi presenti nelle soluzioni dei singoli quesiti. Ognuna delle due maschere è quindi articolata in due parti: la prima riguarda i problemi, la seconda i quesiti. Le indicazioni ai correttori sono espresse in forma di domande diretta a risposta chiusa e il materiale fornito per la correzione consisteva in una versione cartacea e in una versione Excel della *maschera di correzione*, nella quale effettuare direttamente l'inserimento dei dati.

Per ogni item del problema e per ogni quesito, la maschera prevede una sequenza di domande:

1. tre domande generali inerenti lo svolgimento e la correzione del singolo quesito o *item* (“Il quesito è stato affrontato dal candidato” , “Il quesito è stato corretto dal correttore”, “La risposta al quesito è completa e corretta”). Questo ha permesso di rilevare le scelte dello studente e di verificare se erano presenti quesiti in sovrannumero. L'ultimo campo permette di quantificare il numero di quesiti risolti correttamente e quindi di misurare il risultato complessivo dello studente.

2. Alcune domande specifiche, inerenti le richieste del quesito o dell'*item*. Ad esempio, in certi casi viene chiesto se lo studente utilizza una determinata tecnica, una definizione, o un teorema. In altri viene richiesto se un calcolo è effettuato correttamente; in altri se viene utilizzata una determinata argomentazione grafica. L'attenzione è stata concentrata su quei passaggi che possono essere ritenuti particolarmente significativi per l'individuazione delle capacità logiche e argomentative.

3. Due domande su caratteristiche della produzione di testi matematici, relative alle capacità logiche e argomentative emerse nel singolo quesito o *item* (“I passaggi sono concatenati in modo coerente”, “Argomenta la risposta utilizzando coerentemente parole chiave proprie di un ragionamento logico-deduttivo”). Va sottolineato che in alcuni quesiti era esplicitamente richiesto

nel testo di argomentare o giustificare le proprie conclusioni, in altri no.

4. Una domanda conclusiva riguardante il giudizio del correttore sulle capacità logiche e argomentative (“Il correttore esprima un giudizio sulle capacità logiche e argomentative emergenti dallo svolgimento del quesito”). Vale anche per questo giudizio quanto osservato nel punto precedente: per alcuni quesiti l'argomentazione era parte delle richieste esplicite del testo, per altri no. Questa valutazione è espressa su una scala da 0 a 3.

In alcuni casi si è ritenuta opportuna la scomposizione del quesito o dell'*item* in due parti per raffinare l'analisi delle capacità logiche e argomentative nei vari *steps* richiesti in fase di risoluzione. A tale scopo sono state proposte ad ogni *step* le domande di cui al punto c). Ogni problema della prova era articolato in 4 item. Alla fine di ogni problema sono state inserite tre domande per valutare la costruzione complessiva del procedimento risolutivo, con attenzione a come le risposte ai singoli item (che pure sono previsti indipendenti, ma riferiti alla medesima situazione) sono coerenti tra di loro.

1.2 Le maschere trasversali: competenza testuale

La parte sulle competenze trasversali è stata articolata in modo tale da risultare interfacciabile con la maschera già adottata per gli elaborati di italiano. In particolare, sono stati elaborati indicatori che fossero paralleli a quelli specifici delle aree tematiche T (competenze testuali), L (competenze lessicali), G (competenze grammaticali).

Per quanto riguarda la competenza testuale, si è cercato di trovare indicatori che permettessero di rilevare le caratteristiche specifiche di un elaborato di matematica, per quanto riguarda *l'organizzazione e l'articolazione del testo*. Si è quindi rilevato se lo studente *dichiara esplicitamente cosa intende fare, e se enuncia le strategie utilizzate*. Questo modo di procedere, tra l'altro, permette agli insegnanti di meglio interpretare correttamente calcoli, notazioni, trasformazioni. Permette anche di rilevare la consapevolezza nell'utilizzo degli strumenti (operativi e argomentativi).

Un'altra caratteristica della costruzione di un testo di risposta a un problema matematico è l'utilizzo adeguato dei dati forniti. Infine, si è cercato di rilevare la tendenza dello studente a non rispondere esplicitamente alla domanda posta, il più delle volte *delegando* al risultato dei calcoli la risposta. Succede infatti frequentemente che vengano fatti calcoli da cui si può estrapolare la risposta alla consegna, ma questa conclusione non viene esplicitamente richiamata: una situazione tipica si ha ad esempio quando occorre determinare i punti di massimo e minimo di una funzione

assegnata. Lo studente si limita a studiare la variazione del segno della funzione derivata: non si riscontrano errori nel procedimento ma l'argomentazione è incompleta o assente, non viene richiamato il teorema di riferimento e il passo finale viene tralasciato. È stato anche richiesto di rilevare se il testo, nel suo complesso, era organizzato adeguatamente: senza ripetizioni, senza repentini salti di registro.

1.3 Le maschere trasversali: competenza grammaticale

Il parallelo in matematica di una buona competenza grammaticale (*uso delle strutture grammaticali e del sistema ortografico e interpuntivo*) può essere individuato essenzialmente in un utilizzo delle sue strutture sintatticamente corretto e coerente, al fine di costruire un discorso matematico articolato: scelta di strumenti e tecniche di calcolo, uso dei connettivi logici, argomentazione grafica, deduzione da assiomi o da teoremi, passaggio tra i diversi registri di rappresentazione. Tutti questi elementi sono essenziali per argomentare in maniera efficace ed organica. Si è scelto perciò di costruire indicatori che potessero mettere in evidenza le scelte di strumenti effettuate degli studenti e la capacità di operare con essi. Si è quindi rilevato attraverso la maschera l'uso corretto del riferimento ai teoremi nelle argomentazioni; l'utilizzo corretto delle definizioni; la presenza di argomentazioni grafiche; l'utilizzo corretto dei connettivi logici e dei quantificatori; l'uso quando opportuno degli strumenti di calcolo (e la presenza inopportuna di calcoli sovrabbondanti o inutili); la capacità di utilizzare esempi e controesempi a sostegno delle proprie affermazioni.

1.4 Le maschere trasversali: competenza lessicale-semantica

Gli indicatori della competenza lessicale-semantica intendono rilevare la *disponibilità di risorse specifiche del linguaggio* matematico. L'analisi degli aspetti lessicali e semantici dei testi matematici prodotti dagli studenti deve quindi innanzitutto tener conto della coesistenza e dell'intreccio di diversi tipi di linguaggio, tutti necessari e funzionali a diversi scopi. Si incontra infatti il linguaggio proprio della logica matematica (connettivi, implicazioni, deduzioni), supportato dal linguaggio naturale che spesso fornisce gli elementi semantici necessari per costruire e dare corpo all'argomentazione, ma talvolta si confonde con il primo, alterandone il significato. Non di rado si incontra un terzo tipo di linguaggio: il cosiddetto "matematichese", una sorta di linguaggio burocratico proprio della matematica, manipolato senza controllo critico da qualche studente (un analogo in matematica del "politichese"), con esiti talvolta imbarazzanti.

All'elenco degli elementi portatori di significati si aggiungono tabelle e linguaggio grafico.

Per ognuno di questi tipi di linguaggio sono state predisposte domande specifiche volte a rilevarne la presenza e, in tal caso, a rilevare la sostanziale pertinenza del suo uso da parte degli studenti. Si è quindi segnalata la coerenza (semantica) nell'uso della terminologia e dei simboli, in particolare dei connettivi e dei quantificatori; la presenza di definizioni esplicitamente richiamate; la coerenza nell'uso del linguaggio naturale; l'uso di diversi registri di rappresentazione.

1.5 Gli indicatori riassuntivi

Come si è detto, il compito è articolato in problemi e quesiti tra i quali il candidato deve scegliere. Da un punto di vista della misurazione e della quantificazione dei risultati dell'analisi, gli *item* della prima parte della *maschera di ricorrezione* presentano il problema di riferirsi a quesiti differenti, in cui le variabili osservate dipendono strettamente dalla consegna posta. Sono stati perciò in seguito raggruppati in indicatori più sintetici per poter confrontare gli elaborati degli studenti del campione, indipendentemente dalle scelte compiute, e per poterli correlare agli indicatori presenti nella scheda di rilevazione degli errori ricorrenti utilizzata per le prove di italiano. D'altra parte, la normativa non prevede che venga assegnato un punteggio specifico a ciascun quesito o a ciascuna domanda del problema; dunque l'assunto di partenza è che il compito vada valutato globalmente, e in particolare che le competenze, abilità e conoscenze siano rilevabili dall'insieme del compito, non dalla somma delle risposte alle singole richieste. Non è possibile peraltro prescindere da una distinzione tra quanto rilevabile attraverso il problema e quanto attraverso i quesiti: la normativa prevede esplicitamente (anche se non fissa soglie per la sufficienza o per l'eccellenza) che il candidato risponda a un problema e a 5 quesiti. La separazione del problema dai quesiti risponde al fatto che nelle prove problemi e quesiti propongono consegne sostanzialmente differenti.

Si è quindi provveduto, in fase di elaborazione dei dati, ad aggregare le informazioni rilevate con la prima parte della maschera (quella analitica) in 11 indicatori sintetici. A differenza degli indicatori puntuali presenti nella maschera, gli indicatori globali non sono dicotomici, ma assumono valori su scale di punteggi, diverse a seconda degli indicatori e costruite sulla base del numero di indicatori puntuali inerenti quella macrocategoria. Tali indicatori sono:

- 1) correttezza del problema. Questo indicatore conta a quante tra le quattro domande del problema è stata data una risposta sostanzialmente corretta. Il suo valore varia quindi da 0 a 4.
- 2) Coerenza nella concatenazione dei passaggi nel problema. Questo indicatore conta in quante, tra le quattro domande del problema, è stata rilevata coerenza nella concatenazione

dei passaggi. Il suo valore varia quindi da 0 a 4.

- 3) Utilizzo di parole chiave nel problema. Questo indicatore conta le domande del problema in cui l'argomentazione utilizza le parole chiave caratteristiche di un ragionamento deduttivo. Il suo valore varia da 0 a 4.
- 4) Giudizio complessivo sulle capacità logiche e deduttive esplicitate nel problema. Questo indicatore somma i giudizi (ognuno variabile da 0 a 3) espressi per ciascuna delle 4 domande del problema. Il suo valore varia quindi da 0 a 12.
- 5) Correttezza dei quesiti. Questo indicatore conta a quanti tra i cinque quesiti scelti dal candidato è stata data una risposta sostanzialmente corretta. Il suo valore varia quindi da 0 a 5.
- 6) Coerenza nella concatenazione dei passaggi nei quesiti. Questo indicatore conta in quanti, tra i cinque quesiti scelti dal candidato, è stata rilevata coerenza nella concatenazione dei passaggi. Il suo valore varia quindi da 0 a 5.
- 7) Utilizzo di parole chiave nei quesiti. Questo indicatore conta i quesiti in cui l'argomentazione utilizza le parole chiave caratteristiche di un ragionamento deduttivo. Il suo valore varia quindi da 0 a 5.
- 8) Giudizio complessivo sulle capacità logiche e deduttive esplicitate nei quesiti. Questo indicatore somma i giudizi (ognuno variabile da 0 a 3) espressi per ciascuno dei 5 quesiti. Il suo valore varia quindi da 0 a 15.

A questi vanno aggiunti i 3 indicatori complessivi sulla coesione tra le domande del problema. In questo modo sono disponibili complessivamente 11 indicatori ricavati dalla prima parte delle maschere.

Si parla, in questa sede, di "coerenza" nel senso di concatenazione opportuna delle affermazioni e utilizzo adeguato di termini propri del ragionamento logico e nell'argomentazione ("I passaggi sono concatenati in modo coerente", "Argomenta la risposta utilizzando coerentemente parole chiave proprie di un ragionamento logico-deduttivo") e di organicità tra le varie parti del problema ("Le risposte alle diverse domande sono tra loro coerenti?", "Trova modo di utilizzare per una domanda quanto trovato nelle precedenti?", "Dopo aver risposto ad una domanda, modifica la figura per tener conto di quanto trovato?").

1.6 Il lavoro sugli elaborati

Nell'analisi degli elaborati, i 24 correttori hanno testato una tecnica di intervento diretto sui

testi prodotti dagli studenti, già proposta, nelle precedenti rilevazioni, dall'*equipe* responsabile dell'analisi delle prove di Italiano ai suoi correttori, denominata *correzione multicolor*. L'obiettivo è quello di costruire (e progressivamente perfezionare) uno strumento di correzione che ponga in evidenza in modo chiaro sul testo alcune caratteristiche dell'elaborato, significative sia in senso positivo che negativo. Trattandosi di competenze trasversali, si è cercato di sviluppare per la matematica uno strumento analogo a quello già predisposto per le prove di italiano.

È stato chiesto ai correttori di evidenziare tutti i passaggi degli elaborati in cui si poteva rilevare la presenza (o l'utilizzo improprio, scorretto o inadeguato) di parole chiave del ragionamento deduttivo(se...allora; essendo...si ha; dato che...;) e il richiamo esplicito di definizioni e teoremi .

Queste sono caratteristiche importanti della produzione di testi matematici e possono essere considerate fondamentali per valutare gli aspetti comunicativi dell'apprendimento, per quanto riguarda le capacità logiche e argomentative.

Per le parole chiave e per il richiamo a teoremi e definizioni, è stato chiesto di segnalare elementi interessanti sia nel caso di comportamenti buoni o molto buoni sia nel caso contrario, attraverso la sottolineatura di alcune parti delle prove con evidenziatori colorati. Questo dovrebbe aiutare a rendere più ancorata a elementi oggettivamente presenti nell'elaborato una valutazione che spesso rischia di dipendere esclusivamente dal lettore e di essere basata più che altro su un'impressione, un effetto alone, di cui rimane traccia una volta visionato tutto l'elaborato.

2. I primi risultati

Le tabelle seguenti riportano i risultati del conteggio dei rilevamenti dei correttori per gli 11 indicatori complessivi ricavati dalla parte analitica e per ognuno dei 18 indicatori trasversali di competenza, per ciascuno dei due gruppi (ordinamento o PNI) del campione esaminato. Ricordiamo che gli indicatori G7 e L6 rilevavano un aspetto negativo, e che quindi una percentuale minore indica un risultato migliore. La spiegazione delle sigle è nelle maschere riportate nella parte quarta.

Indicatori trasversali (percentuali)

	T1	T2	T3	T4	T5
PNI	44%	41%	98%	67%	73%
ORD	26%	34%	87%	62%	5%

Tab. 1 *Competenze "testuali"*

	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7
PNI	50%	64%	38%	17%	82%	8%	29%
ORD	26%	61%	32%	23%	72%	6%	39%

Tab. 2 *Competenze "grammaticali"*

	L1	L2	L3	L4	L5	L6
PNI	58%	23%	50%	26%	82%	10%
ORD	72%	34%	29%	19%	49%	26%

Tab. 3 *Competenze "lessicali e semantiche"*

Indicatori complessivi della prima parte (medie o percentuali)

	Media OK	Media Coer	Media PC	Media GC
PNI	1,82	2,7	1,7	6,62
ORD	2,73	3,4	0,94	5,91

Tab. 4 *Indicatori relativi ai quesiti*

	Media OK	Media Coer	Media PC	Media GC	Org1	Org2	Org3
PNI	1,8	2,51	1,57	5,2	71%	48%	26%

Tab. 5 *Indicatori relativi ai problemi*

3. Prime osservazioni sui risultati

Nei dati riportati emergono alcune evidenze e, in particolar modo, le tendenze "fotografabili" attraverso una prima analisi quantitativa. Ci limitiamo alle primissime superficiali osservazioni.

Per quanto riguarda la correttezza degli elaborati, nei compiti di ordinamento la media di

domande del problema a cui è stata data una risposta corretta è 1,6 (su 4), mentre la media dei quesiti è 2,73 (su 5). Per i compiti PNI la media sui problemi è 1,8 e la media sui quesiti è 1,82. Nell'uno e nell'altro caso, gli studenti riescono a svolgere, in media, meno della metà del compito, e questo dato è in linea con i risultati delle ricorrezioni precedenti. Da tutti gli indicatori emerge che gli studenti del PNI hanno una resa migliore sul problema, mentre gli studenti di ordinamento "rendono" meglio sui quesiti. Gli studenti PNI hanno anche risultati migliori rispetto a quelli di ordinamento su quasi tutti gli indicatori trasversali (si ricordi che gli indicatori G7 e L6 rilevano vizi- calcoli inutili e linguaggio inutilmente tecnico-formale, quindi una percentuale minore corrisponde a un risultato migliore).

Per gli indicatori trasversali, quello più indicato dai correttori è stato il T3: "Utilizza ordinatamente i dati forniti nel testo" (complessivamente quasi il 90% degli studenti), mentre invece il meno indicato è stato il G6: "Sceglie in modo pertinente esempi e controesempi, a sostegno delle proprie affermazioni" (meno del 7% degli studenti).

La spuntatura dell'indicatore T3 segnala che lo studente utilizza tutti i dati forniti nel testo; quasi sempre questo avviene nell'ordine in cui essi compaiono. Questo atteggiamento, a prima vista ragionevole e spesso funzionale, caratterizza anche studenti che in matematica sono abituati a risolvere problemi utilizzando acriticamente i numeri presenti nel testo. In casi di questo tipo l'utilizzo ordinato dei dati forniti nel testo è un fenomeno tutt'altro che positivo, tanto che in didattica della matematica esiste un nome per indicare questo fenomeno: si parla di "effetto età del capitano"¹⁴. L'elevata percentuale di studenti in questo indicatore non è quindi di per sé un segnale necessariamente positivo.

Il fatto che l'indicatore G6 sia di gran lunga il meno selezionato mette bene in evidenza che solo un esiguo numero di studenti, al termine del Liceo scientifico, utilizza esempi e controesempi a supporto delle proprie affermazioni, anche se questa è una procedura tipica dell'argomentazione matematica. Entrano in gioco però altre due questioni da non sottovalutare: la carenza così evidente di spuntature per questo indicatore potrebbe innanzitutto dipendere dal fatto che non fosse strettamente necessario, per rispondere alle domande presenti nel testo, fare ricorso a esempi e controesempi. In secondo luogo, per effetto del contratto didattico, potrebbe risultare determinante l'assenza di una richiesta esplicita di esempi e controesempi nel testo del problema e dei quesiti. Il compito peraltro non richiede esplicitamente nemmeno l'utilizzo di strumenti di

14S.Baruk, *L'âge du capitaine. De l'erreur en mathématiques*. Paris (1997), Seuil.

calcolo, che pure gli studenti sembrano utilizzare adeguatamente, come si può osservare dai dati relativi all'indicatore G5.

Come mostrato dai dati relativi agli indicatori T1 e T2 ("Dichiara esplicitamente, all'inizio dello svolgimento o nel corso della risoluzione, cosa sta facendo?"; "Enuncia esplicitamente le strategie di risoluzione che adotta?") ben oltre la metà degli studenti non utilizza, in tutto il compito, alcuna affermazione dichiarativa sul proprio operato. La *performance* è bassa anche rispetto all'indicatore L4 (utilizzo esplicito delle definizioni).

Osservando l'indicatore G7, si riscontra la presenza di un elevato numero di studenti che fa ricorso a calcoli inutili. Si può ipotizzare che questi servano in qualche modo a compensare la mancanza di argomentazione.

Nel campione erano presenti alcuni elaborati riconducibili a una categoria di "testo senza parole". Nel tentativo di costruire opportuni modelli e strumenti per la valutazione dell'argomentazione nelle prove di matematica non si può ignorare la tendenza a considerare inutile l'utilizzo del linguaggio verbale negli elaborati di matematica. Non è raro, infatti, osservare elaborati sostanzialmente corretti o, in alcuni casi, addirittura notevolmente superiori alla media dal punto di vista della conoscenza e della competenza nell'applicare procedure, ma quasi totalmente privi di argomentazione verbale. Questa osservazione contribuisce a rendere ancor più problematica la valutazione delle capacità logiche e argomentative di uno studente attraverso la sola analisi di un suo elaborato e a mettere in discussione l'influenza positiva di abilità argomentative di tipo comunicativo sulla buona organizzazione di un ragionamento logico-deduttivo, ritenute fondamentali da alcuni insegnanti. La situazione è complicata come si è detto dal fatto che non è chiaro, né tanto meno condiviso, che cosa si intenda per capacità logiche e argomentative in matematica e come si possa distinguere con chiarezza uno studente che le possiede da uno che non sa argomentare. L'argomentazione non può infatti essere assente se lo studente è riuscito ad interpretare correttamente il problema e a fornire una soluzione opportuna e completa, con la concatenazione di passaggi effettuata in maniera coerente, ma non c'è né traccia nell'elaborato, almeno in forma di proposizioni (c'è quindi un distacco evidente tra l'argomentazione implicita e l'argomentazione esplicita).

Questa evidenza sembra innanzitutto rendere necessaria una distinzione tra argomentazione intesa, come concatenazione di proposizioni e altri tipi di argomentazione, come ad esempio argomentazioni grafiche o argomentazioni per assurdo con controesempi espressi solo in forma di prova empirica. D'altra parte, spesso, l'assenza di argomentazione verbale è legata alla

riproduzione acritica di schemi risolutivi e procedimenti incontrati in precedenza in situazioni che lo studente giudica analoghe (clausola del contratto didattico nota come *effetto Jourdain*¹⁵). Inoltre, il ricorso frequente a scritture formali (che traspare dagli indicatori ed è facilmente rilevabile negli elaborati del campione) può segnalare la presenza di incertezza e sfiducia dell'allievo nella propria argomentazione (ed essere quindi riferibile alla clausola del contratto didattico nota come *esigenza di giustificazione formale*).

¹⁵Cfr. ad es. D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I., Marazzani I., Sarrazy B., *Didattica della matematica. Alcuni effetti del "contratto"*. Bologna (2010), Archetipolibri.

PARTE TERZA
LE SCELTE DEGLI STUDENTI

(F. Ferretti)

1. La distribuzione delle scelte

Le attività condotte nel corso dell'indagine hanno permesso, in primo luogo, di "fotografare" la distribuzione delle scelte dei candidati. Nella seconda prova dell'esame di Stato gli studenti devono scegliere di svolgere 1 tra i 2 problemi proposti dal MIUR e 5 dei 10 quesiti. Dall'analisi di queste scelte si possono così ottenere informazioni sulla matematica che i ragazzi "ritengono di sapere" (gli ambiti in cui si sentono più sicuri, le tipologie di esercizi che vengono ritenute più facili e le consegne più familiari). Questa "percezione" può venire poi collegata a quanto realmente i ragazzi stessi "sanno" e "sanno fare" nel compito dell'esame di Stato.

Nella *Tabella 6* sono riportate le percentuali di scelta dei ragazzi che hanno affrontato il compito di ordinamento. Per ogni punto del problema e per ogni quesito è riportata la percentuale di studenti che hanno scelto il quesito, la percentuale (sul totale del campione) di quelli che hanno saputo risolverlo e la percentuale di quelli che l'hanno risolto tra quelli che l'hanno scelto.

Problemi Ord	% scelte	% risposte corrette sul totale	% risposte corrette	Quesiti Ord	% scelte	% risposte corrette sul totale	% risposte corrette
1.1	47%	25%	53%	1	14%	5%	36%
1.2	58%	16%	28%	2	19%	2%	10%
1.3	52%	14%	27%	3	67%	44%	66%
1.4	44%	24%	55%	4	86%	69%	80%
2.1	40%	27%	67%	5	20%	3%	15%
2.2	37%	14%	38%	6	93%	47%	51%
2.3	27%	12%	44%	7	88%	68%	77%
2.4	34%	28%	82%	8	13%	6%	46%
				9	29%	12%	41%
				10	56%	16%	29%

Tab. 6 *Problemi e quesiti del compito di Ordinamento.*

Per quanto riguarda la scelta tra i due problemi, è evidente una leggera propensione verso il primo problema e, in generale, verso domande, in entrambi i problemi, che fanno parte del programma standard di analisi matematica, svolta nel Liceo Scientifico. Stesso andamento si può evincere anche analizzando le scelte dei quesiti: una percentuale molto alta di studenti ha deciso di svolgere i quesiti 3, 4, 6, 7, 10. Ad una prima lettura, tali quesiti richiedono conoscenze ben note ad uno studente di un Liceo Scientifico italiano (come il concetto di *coefficiente angolare* e di *continuità*) e appaiono simili ad esercizi più e più volte svolti durante il secondo ciclo di istruzione secondaria

(risolvere una *disequazione trigonometrica* e calcolare il *volume di un solido mediante il calcolo integrale*).

Notiamo comunque l'alta variabilità delle percentuali di scelta: si va dal 13% del quesito 8 al 93% del quesito 6.

La tabella seguente è analoga per gli studenti Liceo Scientifico, indirizzo PNI.

Problemi PNI	% scelte	% risposte corrette sul totale	% risposte corrette	Quesiti PNI	% scelte	% risposte corrette sul totale	% risposte corrette
1.1	52%	30%	58%	1	50%	19%	38%
1.2	55%	30%	55%	2	44%	5%	11%
1.3	47%	19%	40%	3	47%	25%	53%
1.4	44%	16%	36%	4	55%	13%	24%
2.1	44%	30%	68%	5	44%	13%	30%
2.2	33%	13%	40%	6	44%	30%	68%
2.3	44%	19%	43%	7	63%	5%	8%
2.4	38%	13%	34%	8	27%	25%	93%
				9	66%	38%	58%

Tab.7 *Problemi e quesiti del compito PNI.*

La situazione del compito PNI è analoga: la maggior parte degli studenti sceglie di svolgere il primo problema (su concetti fondamentali di analisi matematica come derivata e punti di massimo e minimo), evitando di dover affrontare domande concernenti argomenti non presenti abitualmente nei *curricoli implemented*¹⁶ in una quinta al Liceo Scientifico, come il problema classico della *duplicazione del cubo* (punto n°2 del secondo problema). Stessa situazione per quanto riguarda la scelta dei quesiti: i più scelti sono l'1, il 4, il 7 e il 9 nei quali le capacità e le competenze richieste sono, almeno all'apparenza, quelle della maggior parte degli esercizi standard che più si svolgono durante il percorso scolastico. Osserviamo comunque che la distribuzione delle scelte è molto più equilibrata (le percentuali per i quesiti sono tutte comprese tra il 27% e il 66%). Seppure in misura minore, è evidente anche per gli elaborati PNI la tendenza a evitare i quesiti in ambito geometrico e probabilistico.

Come si può verificare osservando le tabelle precedenti, sono presenti sia nel compito di ordinamento sia in quello PNI:

¹⁶Per *implemented curriculum* si intende il curriculum che è effettivamente svolto dall'insegnante. Si distingue sia dall'*intended curriculum* che è il 'classico' curriculum, quello di base che si dovrebbe fare sulla carta, che dall'*attained curriculum* che è il curriculum effettivamente appreso dai ragazzi.

- quesiti scelti da un'alta percentuale di studenti ma svolti correttamente da una bassa percentuale di essi;
- quesiti scelti da una bassa percentuale di studenti ma svolti correttamente da un'alta percentuale di essi.

Da questi comportamenti risulta evidente un'errata percezione delle proprie capacità risolutive quando si è davanti ad un esercizio/problema matematico, come già rilevato in altri studi ¹⁷.

I risultati della rilevazione sulle prove 2009-2010 confermano quanto osservato nelle precedenti analisi condotte dall'INVALSI in collaborazione con l'UMI. Le scelte degli studenti possono essere dettate da fattori di varia natura e possono essere interpretati e spiegati attraverso categorie ampiamente studiate dalla didattica della matematica: ad esempio, alcune clausole del contratto didattico¹⁸ e le diverse componenti dell'apprendimento della matematica¹⁹.

Analizzando i risultati del compito di ordinamento, non sorprende il risultato del Q4 (tra i più scelti e, in assoluto, quello con la percentuale più alta di risposte corrette). Il testo del quesito è molto familiare agli studenti e la sua risoluzione richiede semplicemente l'applicazione di un limite notevole, che è uno degli esercizi più svolti durante il percorso scolastico. Scelti da pochi e risolti da pochissimi sono i due quesiti di geometria (Q2 e Q5). In conclusione, da queste ricorrenze risulta ad esempio che 7 ragazzi su 10 sanno riconoscere un limite notevole e riprodurre un calcolo noto; mentre meno di 2 su 10 sanno affrontare semplici situazioni di geometria dello spazio.

In accordo con le rilevazioni precedenti, le scelte degli studenti del PNI sono distribuite in maniera più equilibrata; anche in questo però i risultati sono molto disomogenei come percentuale di riuscita.

Possono essere scelti come casi esemplari il Q7 e il Q8. Il primo è un quesito di probabilità che più della metà degli studenti ha deciso di svolgere, ma che pochissimi hanno risolto

17 Cfr. Ferretti F.(2011) *Differenze tra le convinzioni degli studenti e il loro effettivo sapere in Matematica. Evidenze dall'esame di Stato. Analisi di comportamenti strategici in base alle definizioni di Vygotskij nell'ambito delle zone di sviluppo prossimale e potenziale.* Tesi di laurea specialistica, Bologna.

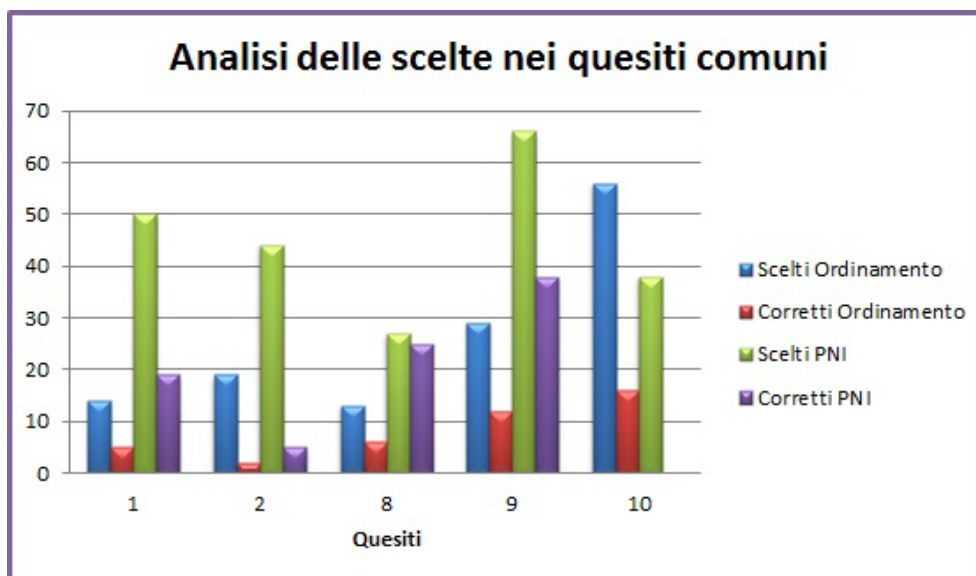
18 Cfr. ad es. D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I., Marazzani I., Sarrazy B., *Didattica della matematica. Alcuni effetti del "contratto".* Bologna (2010), Archetipolibri.

19 M. I. Fandiño Pinilla, *Molteplici aspetti dell'apprendimento della matematica.* Gardolo (2008), Ed. Erickson

correttamente; il secondo, la cui risoluzione richiede semplicemente la conoscenza della definizione di coefficiente binomiale e di progressione aritmetica, è scelto da circa un quarto degli studenti e risolto da quasi tutti.

Un discorso a parte meritano i risultati del quesito Q6 di ordinamento, in quanto collegabili più direttamente al tema principale di questa indagine (le capacità logiche e argomentative). Il quesito è il più scelto, probabilmente perché appare sotto forma di una consegna molto familiare (la ricerca del dominio di una funzione nota). Per rispondere correttamente è necessaria la padronanza di due fatti, entrambi ben conosciuti: la conoscenza del dominio di una funzione radicale e la capacità di risolvere una elementare disequazione trigonometrica. Dalla maschera di osservazione risulta che questi due fatti sono effettivamente conosciuti dai ragazzi e esplicitati correttamente nell'elaborato. I risultati però sono negativi (solo un ragazzo su due è stato in grado di dare la risposta corretta); le conoscenze ci sono, ma manca la capacità di trarre le conclusioni corrette dalla premesse. Emerge una difficoltà per quanto riguarda l'argomentazione.

Per quanto riguarda i quesiti comuni ai due compiti, come si evince dal sottostante istogramma, i questi sono stati tutti percentualmente scelti molto di più dagli studenti PNI che non da quelli di ordinamento; questo dipende probabilmente dal fatto che sono percepiti più semplici e familiari dagli studenti PNI, perché riguardano parti meno standard del curriculum, meno presenti nel *curriculum implemented* nei Licei di ordinamento. Fa eccezione il quesito 10, che però prevedeva una consegna diversa nei due compiti.



2. Le scelte degli studenti e le competenze trasversali

Esiste un collegamento tra le competenze in ambito testuale, grammaticale e lessicale, le scelte dei ragazzi e la probabilità di riuscita in un quesito? Le seguenti tabelle forniscono elementi per lo studio di questo problema; svilupperemo un inizio di analisi utilizzando i risultati raccolti per i compiti di ordinamento, per i quali il campione è più consistente (circa 100 compiti).

La seguente tabella mostra, per i quesiti di ordinamento, la percentuale di scelta e le valutazioni medie ottenute da chi ha scelto quel quesito, negli indicatori complessivi (di correttezza e coerenza) relativi ai quesiti. La prima riga riporta il dato per tutta la popolazione.

	% scelte	Media OK	Media Coer	Media PC	Media GC
Totale		2,73	3,4	0,94	5,9
Q1	35%	3,07	3,67	0,92	6,42
Q2	10%	2,31	2,92	1,13	4,89
Q3	66%	3	3,63	0,9	5,95
Q4	85%	2,83	3,48	0,84	5,95
Q5	15%	2,2	3,3	0,95	6,4
Q6	52%	2,71	3,42	0,88	5,92
Q7	78%	2,87	3,54	0,95	6,35
Q8	46%	2,84	4	1,23	6,15
Q9	41%	2,68	3,06	1,48	6,31

Tab.8 *Risultati in rapporto alle scelte- indicatori complessivi.*

Le tabelle che seguono riportano, per i quesiti di ordinamento, le percentuali di riuscita, per gli indicatori trasversali, di chi ha scelto quel quesito.

	T1	T2	T3	T4	T5
Totale	26	34	87	62	57
Q1	42	50	92	78	71
Q2	5	21	78	52	36
Q3	24	34	92	69	65
Q4	29	34	89	63	58
Q5	25	40	90	55	55
Q6	27	34	89	60	56
Q7	27	36	89	65	59
Q8	15	7	92	46	38

	T1	T2	T3	T4	T5
Q9	24	44	82	55	65
Q10	28	33	87	66	55

Tab.9 Risultati in rapporto alle scelte- competenze testuali.

	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7
Totale	26	61	31	23	72	6	39
Q1	35	64	50	21	78	14	28
Q2	21	52	26	26	68	0	42
Q3	25	65	31	22	74	7	39
Q4	24	60	30	24	74	4	38
Q5	25	55	15	0	70	5	25
Q6	22	61	29	22	72	5	38
Q7	26	65	32	22	74	6	39
Q8	30	46	30	30	61	7	46
Q9	51	58	31	20	72	6	37

Tab.10 Risultati in rapporto alle scelte- competenze grammaticali.

	L1	L2	L3	L4	L5	L6
Totale	72	34	29	19	49	26
Q1	85	35	42	7	57	35
Q2	57	36	21	10	47	42
Q3	77	34	28	19	45	25
Q4	75	34	28	20	49	25
Q5	55	10	30	20	60	25
Q6	71	32	28	20	47	27
Q7	73	34	28	20	52	24
Q8	69	38	30	7	38	23
Q9	72	34	27	20	55	31

Tab.11 Risultati in rapporto alle scelte- competenze lessicali-semantiche.

Il quesito 1 è caratterizzato dal fatto che in quasi tutti gli indicatori i candidati che lo scelgono hanno risultati più alti della media, talvolta ottimi. Non è un caso che questo quesito richieda esplicitamente una dimostrazione; chi lo sceglie ritiene ovviamente di essere in grado di affrontare la dimostrazione di un enunciato matematico.

3. Analisi di un caso: il quesito Q6 del compito di ordinamento

È interessante anche analizzare come la capacità di rispondere correttamente a un quesito sia collegata alle competenze trasversali rilevate. Come esempio, si riportano le tabelle relative al quesito Q6, che è risultato essere particolarmente significativo.

Come si è già osservato, il quesito è stato affrontato da una altissima percentuale di studenti (il 93%; è il quesito più scelto in assoluto); solo la metà di questi studenti riesce però a risolverlo correttamente, nonostante quasi tutti individuino e riconoscano gli elementi necessari per la soluzione. Se guardiamo la percentuale di riuscita e le medie sugli indicatori degli studenti (quasi tutta la popolazione) che hanno scelto il quesito, distinguendo quelli che lo risolvono e quelli che non lo risolvono, vediamo una divaricazione fortissima di risultati. La prima riga delle tabelle sottostanti riporta i dati relativi a tutta la popolazione, la seconda i dati complessivi per gli studenti che hanno scelto il Q6, la terza i dati per quelli che l'hanno svolto correttamente (il 52%) e la quarta i dati per quelli che l'hanno scelto ma non l'hanno saputo risolvere.

	Media OK	Media Coer	Media PC	Media GC
Totale	2,73	3,4	0,94	5,9
Totale Q6	2,71	3,42	0,88	5,92
Q6 OK	3,64	4,08	0,7	7,64
Q6 NO	1,87	2,73	1,07	4,13

Tab. 12 Risultati del Q6- indicatori complessivi.

Ancora più significativo è il dato relativo alle competenze trasversali; il dato si riferisce alle percentuali di risposta.

	T1	T2	T3	T4	T5
Totale	26	34	87	62	57
Totale Q6	27	34	89	60	56
Q6 OK	40	46	93	80	63
Q6 NO	13	22	84	40	48

Tab. 13 *Risultati del Q6- competenze testuali.*

	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7
Totale	26	61	31	23	72	6	39
Totale Q6	22	61	29	22	72	5	38
Q6 OK	31	59	31	25	82	8	38
Q6 NO	13	64	26	20	62	2	37

Tab. 14 *Risultati del Q6- competenze grammaticali.*

	L1	L2	L3	L4	L5	L6
Totale	72	34	29	19	49	26
Q6	71	32	28	20	47	27
Q7	82	38	25	29	59	23

Tab.15 *Risultati del Q6- competenze lessicali-semantiche*

PARTE QUARTA

I MATERIALI

Allegato 1

Il compito dell'Esame di Stato 2009/10 per i Licei scientifici di Ordinamento

http://www.invalsi.it/Estato2-0910/documenti/MAT_Seconda_prova2010_ordinamento.pdf

Allegato 2

La maschera di correzione per i Licei di Ordinamento

Codice Correttore:

Codice Identificativo del compito valutato:

Maschere di Correzione – Esame di Stato di Liceo Scientifico 2010

Corso di ordinamento

PROBLEMI

PROBLEMA 1

Q1-es) Il quesito è stato affrontato dal candidato

Q1-corr) Il quesito è stato corretto dal correttore

Q1-ok) La risposta al quesito è completa e corretta

Q1-a) Costruisce la figura

Q1-b) Individua un metodo per esprimere il raggio di λ in funzione di x

Q1-c) Esprime le lunghezze dei segmenti necessari alla risoluzione in funzione di x e di $f(x)$

Q1-d) I passaggi sono concatenati in modo coerente

Q1-e) Argomenta la risposta utilizzando coerentemente parole chiave proprie di un ragionamento logico-deduttivo

Q1-comm) Il correttore esprima un giudizio sulle capacità logico-argomentative emergenti dallo svolgimento del quesito

Q2-es) Il quesito è stato affrontato dal candidato

Q2-corr) Il quesito è stato corretto dal correttore

Q2-ok) La risposta al quesito è completa e corretta

Q2-a) Riconosce che si tratta di un'iperbole equilatera e traccia il grafico di $f(x)$

Q2-b) Argomenta (analiticamente o facendo riferimento al grafico) che la funzione è invertibile

Q2-c) Afferma esplicitamente che il grafico della inversa coincide con il grafico della $f(x)$

Q2-d) I passaggi sono concatenati in modo coerente

Q2-e) Argomenta la risposta utilizzando coerentemente parole chiave proprie di un ragionamento logico-deduttivo

Q2-comm) Il correttore esprima un giudizio sulle capacità logico-argomentative emergenti dallo svolgimento del quesito

Q3-es) Il quesito è stato affrontato dal candidato

Q3-corr) Il quesito è stato corretto dal correttore
Q3-ok) La risposta al quesito è completa e corretta
Q3-a) Mostra di capire che in un intorno di 0 si ha $g(x) = f(x)$
Q3-b) Calcola il coefficiente angolare e trova l'equazione della retta tangente nel punto R
Q3-c) I passaggi sono concatenati in modo coerente dal punto di vista logico
Q3-d) Argomenta la risposta utilizzando coerentemente parole chiave proprie di un ragionamento logico-deduttivo
Q3-e) Studia la curva nei due intorni di $x=1$ e le relative equazioni delle rette tangenti
Q3-f) Giunge alla conclusione che S è un punto angoloso
Q3-g) I passaggi sono concatenati in modo coerente
Q3-h) Argomenta la risposta utilizzando coerentemente parole chiave proprie di un ragionamento logico-deduttivo
Q3-comm) Il correttore esprima un giudizio sulle capacità logico-argomentative emergenti dallo svolgimento del quesito

Q4-es) Il quesito è stato affrontato dal candidato
Q4-corr) Il quesito è stato corretto dal correttore
Q4-ok) La risposta al quesito è completa e corretta
Q4-a) Indica esplicitamente nel grafico la figura della quale si richiede il calcolo dell'area
Q4-b) Esprime l'area richiesta mediante un integrale
Q4-c) Calcola correttamente l'area
Q4-d) I passaggi sono concatenati in modo coerente
Q4-e) Argomenta la risposta utilizzando coerentemente parole chiave proprie di un ragionamento logico-deduttivo
Q4-comm) Il correttore esprima un giudizio sulle capacità logico-argomentative emergenti dallo svolgimento del quesito

Coerenza interna delle diverse parti del Problema 1:

1. Le risposte alle diverse domande sono tra loro coerenti?
2. Trova modo di utilizzare per una domanda quanto trovato nelle precedenti?
3. Dopo aver risposto ad una domanda, modifica la figura per tener conto di quanto trovato?

PROBLEMA 2

1.

- Q1-es) Il quesito è stato affrontato dal candidato
- Q1-corr) Il quesito è stato corretto dal correttore
- Q1-ok) La risposta al quesito è completa e corretta
- Q1-a) Mostra di capire che si tratta di una funzione esponenziale e che G_b varia con il variare del valore assunto da b
- Q1-b) Disegna il grafico nel caso $b > 1$
- Q1-c) Disegna il grafico nel caso $0 < b < 1$
- Q1-d) I passaggi sono concatenati in modo coerente
- Q1-e) Argomenta la risposta utilizzando coerentemente parole chiave proprie di un ragionamento logico-deduttivo
- Q1-comm) Il correttore esprima un giudizio sulle capacità logico-argomentative emergenti dallo svolgimento del quesito

2.

- Q2-es) Il quesito è stato affrontato dal candidato
- Q2-corr) Il quesito è stato corretto dal correttore
- Q2-ok) La risposta al quesito è completa e corretta
- Q2-a) Scrive le coordinate di un punto generico P
- Q2-b) Determina l'equazione della retta tangente nel punto generico P
- Q2-c) Trova le coordinate dei punti A e B e la distanza AB
- Q2-d) Trova i due valori di b per i quali tale distanza vale 1
- Q2-e) I passaggi sono concatenati in modo coerente
- Q2-f) Argomenta la risposta utilizzando coerentemente parole chiave proprie di un ragionamento logico-deduttivo
- Q2-comm) Il correttore esprima un giudizio sulle capacità logico-argomentative emergenti dallo svolgimento del quesito

3.

- Q3-es) Il quesito è stato affrontato dal candidato
- Q3-corr) Il quesito è stato corretto dal correttore
- Q3-ok) La risposta al quesito è completa e corretta
- Q3-a) Trova l'equazione della retta r
- Q3-b) Mostra di sapere che il coefficiente angolare di una retta coincide con la tangente trigonometrica dell'angolo che essa forma col semiasse positivo delle ascisse e trova il valore dell'angolo
- Q3-c) I passaggi sono concatenati in modo coerente
- Q3-d) Argomenta la risposta utilizzando coerentemente parole chiave proprie di un ragionamento logico-deduttivo
- Q3-comm) Il correttore esprima un giudizio sulle capacità logico-argomentative emergenti dallo svolgimento del quesito

4.

- Q4-es) Il quesito è stato affrontato dal candidato
- Q4-corr) Il quesito è stato corretto dal correttore
- Q4-ok) La risposta al quesito è completa e corretta

- Q4-a) Individua correttamente nel grafico la figura della quale si deve calcolare l'area**
- Q4-b) Individua la funzione da integrare**
- Q4-c) Esprime l'area richiesta mediante l'integrale della funzione**
- Q4-d) Calcola l'area**
- Q4-e) I passaggi sono concatenati in modo coerente**
- Q4-f) Argomenta la risposta utilizzando coerentemente parole chiave proprie di un ragionamento logico-deduttivo**
- Q4-comm) Il correttore esprima un giudizio sulle capacità logico-argomentative emergenti dallo svolgimento del quesito**

Coerenza interna delle diverse parti del Problema 2:

- 1. Le risposte alle diverse domande sono tra loro coerenti?**
- 2. Trova modo di utilizzare per una domanda quanto trovato nelle precedenti?**
- 3. Dopo aver risposto ad una domanda, modifica la figura per tener conto di quanto trovato?**

QUESITI

1)

- Q1-es) Il quesito è stato affrontato dal candidato**
- Q1-corr) Il quesito è stato corretto dal correttore**
- Q1-ok) La risposta al quesito è completa e corretta**
- Q1-a) Mostra di conoscere la scrittura generica di un polinomio di grado n**
- Q1-b) Calcola la derivata di un polinomio generico di grado n**
- Q1-c) Riconosce la forma esplicita di $n!$**
- Q1-d) I passaggi sono concatenati in modo coerente**
- Q1-e) Argomenta la risposta utilizzando coerentemente parole chiave proprie di un ragionamento logico-deduttivo**
- Q1-comm) Il correttore esprima un giudizio sulle capacità logico-argomentative emergenti dallo svolgimento del quesito**

2)

- Q2-es) Il quesito è stato affrontato dal candidato**
- Q2-corr) Il quesito è stato corretto dal correttore**
- Q2-ok) La risposta al quesito è completa e corretta**
- Q2-a) Mostra di capire la necessità di costruire il triangolo rettangolo nello spazio tridimensionale**
- Q2-b) Riconosce graficamente che i triangoli PAB e PBC sono rettangoli in B**
- Q2-c) I passaggi sono concatenati in modo coerente**
- Q2-d) Argomenta la risposta utilizzando coerentemente parole chiave proprie di un ragionamento logico-deduttivo**
- Q2-e) Riconosce graficamente che il piano PCA non è perpendicolare al piano di ABC**
- Q2-f) Mostra di capire che PCA è rettangolo in A**
- Q2-g) Appoggia le proprie argomentazioni sui grafici**
- Q2-h) I passaggi sono concatenati in modo coerente**
- Q2-i) Argomenta la risposta utilizzando coerentemente parole chiave proprie di un ragionamento logico-deduttivo**
- Q2-comm) Il correttore esprima un giudizio sulle capacità logico-argomentative emergenti dallo svolgimento del quesito**

3)

- Q3-es) Il quesito è stato affrontato dal candidato**
- Q3-corr) Il quesito è stato corretto dal correttore**
- Q3-ok) La risposta al quesito è completa e corretta**
- Q3-a) Mette in relazione la pendenza di una retta con il suo coefficiente angolare**
- Q3-b) Mostra di conoscere il significato geometrico di derivata calcolata in un punto**
- Q3-c) Deriva correttamente la funzione composta**
- Q3-d) Risolve l'equazione esponenziale per trovare la soluzione richiesta**

Q3-d) I passaggi sono concatenati in modo coerente
Q3-e) Argomenta la risposta utilizzando coerentemente parole chiave proprie di un ragionamento logico-deduttivo
Q3-comm) Il correttore esprima un giudizio sulle capacità logico-argomentative emergenti dallo svolgimento del quesito

4)

Q4-es) Il quesito è stato affrontato dal candidato
Q4-corr) Il quesito è stato corretto dal correttore
Q4-ok) La risposta al quesito è completa e corretta
Q4-a) Riconduce il limite ad un limite notevole
Q4-b) Individua il corretto cambio di variabili
Q4-b) Calcola il limite notevole
Q4-d) I passaggi sono concatenati in modo coerente dal punto di vista logico
Q4-e) Argomenta la risposta utilizzando coerentemente parole chiave proprie di un ragionamento logico-deduttivo
Q4-comm) Il correttore esprima un giudizio sulle capacità logico-argomentative emergenti dallo svolgimento del quesito

5)

Q5-es) Il quesito è stato affrontato dal candidato
Q5-corr) Il quesito è stato corretto dal correttore
Q5-ok) La risposta al quesito è completa e corretta
Q5-a) Traduce il significato di capacità con quello geometrico di volume
Q5-b) Converte correttamente le unità di misura
Q5-c) Calcola il volume del cono
Q5-d) E' in grado di costruire una funzione che esprima il volume in funzione del raggio o dell'altezza
Q5-e) Deriva la funzione
Q6-f) Applica il Teorema di Fermat per il calcolo dei punti estremanti e individua il massimo
Q5-g) I passaggi sono concatenati in modo coerente
Q5-h) Argomenta la risposta utilizzando coerentemente parole chiave proprie di un ragionamento logico-deduttivo
Q5-comm) Il correttore esprima un giudizio sulle capacità logico-argomentative emergenti dallo svolgimento del quesito

6)

Q6-es) Il quesito è stato affrontato dal candidato
Q6-corr) Il quesito è stato corretto dal correttore
Q6-ok) La risposta al quesito è completa e corretta
Q6-a) Mostra di conoscere come si determina il dominio di una funzione contenente radicali
Q6-b) Risolve la disequazione trigonometrica

Q6-c) I passaggi sono concatenati in modo coerente
Q6-d) Argomenta la risposta utilizzando coerentemente parole chiave proprie di un ragionamento logico-deduttivo
Q5-comm) Il correttore esprima un giudizio sulle capacità logico-argomentative emergenti dallo svolgimento del quesito

7)

Q7-es) Il quesito è stato affrontato dal candidato
Q7-corr) Il quesito è stato corretto dal correttore
Q7-ok) La risposta al quesito è completa e corretta
Q7-a) Mostra di conoscere la definizione di continuità di una funzione
Q7-b) Determina il valore nel punto
Q7-c) Studia il comportamento a destra
Q7-d) Studia il comportamento a sinistra
Q7-e) I passaggi sono concatenati in modo coerente
Q7-f) Argomenta la risposta utilizzando coerentemente parole chiave proprie di un ragionamento logico-deduttivo
Q7-comm) Il correttore esprima un giudizio sulle capacità logico-argomentative emergenti dallo svolgimento del quesito

8)

Q8-es) Il quesito è stato affrontato dal candidato
Q8-corr) Il quesito è stato corretto dal correttore
Q8-ok) La risposta al quesito è completa e corretta
Q8-a) Mette in relazione i tre termini della progressione aritmetica, mostrando di conoscere la proprietà che lega tre termini successivi
Q8-b) Mostra di conoscere la definizione di coefficiente binomiale ed esplicita i termini
Q8-c) I passaggi sono concatenati in modo coerente
Q8-d) Argomenta la risposta utilizzando coerentemente parole chiave proprie di un ragionamento logico-deduttivo
Q8-comm) Il correttore esprima un giudizio sulle capacità logico-argomentative emergenti dallo svolgimento del quesito

9)

Q9-es) Il quesito è stato affrontato dal candidato
Q9-corr) Il quesito è stato corretto dal correttore
Q9-ok) La risposta al quesito è completa e corretta
Q9-a) Applica il teorema dei seni
Q9-b) Deduce la non-esistenza del triangolo tramite il teorema dei seni
Q9-c) I passaggi sono concatenati in modo coerente
Q9-d) Argomenta la risposta utilizzando coerentemente parole chiave proprie di un ragionamento logico-deduttivo
Q9-e) Applicando il teorema dei seni alla seconda situazione, ne deduce che è possibile ricavare l'ampiezza dei due angoli, quindi l'esistenza dei due triangoli

- Q9-f) Trova, tramite le formule trigonometriche inverse, il valore dei due angoli**
- Q9-g) I passaggi sono concatenati in modo coerente**
- Q9-h) Argomenta la risposta utilizzando coerentemente parole chiave proprie di un ragionamento logico-deduttivo**
- Q9-comm) Il correttore esprima un giudizio sulle capacità logico-argomentative emergenti dallo svolgimento del quesito**

10

- Q10-es) Il quesito è stato affrontato dal candidato**
- Q10-es) Il quesito è stato corretto dal correttore**
- Q10-ok) La risposta al quesito è completa e corretta**
- Q10-a) Individua il solido di cui è richiesto il volume**
- Q10-b) Riconosce che il volume richiesto si ottiene sottraendo il volume del solido di rotazione dal volume del cilindro circoscritto al solido**
- Q10-c) Esprime con un integrale il volume di un solido di rotazione attorno all'asse y**
- Q10-d) Calcola il volume**
- Q10-e) Appoggia la propria argomentazione sul disegno**
- Q10-f) I passaggi sono concatenati in modo coerente**
- Q10-g) Argomenta la risposta utilizzando coerentemente parole chiave proprie di un ragionamento logico-deduttivo**
- Q10-comm) Il correttore esprima un giudizio sulle capacità logico-argomentative emergenti dallo svolgimento del quesito**

Allegato 3

Il compito dell'Esame di Stato 2009/10 per i Licei scientifici sperimentali e PNI

http://www.invalsi.it/Estato2-0910/documenti/MAT_Seconda_prova2010_sperimentali.pdf

Allegato 4

La maschera di correzione per i Licei PNI

Codice Correttore:

Codice Identificativo del compito valutato:

Maschere di Correzione – Esame di Stato di Liceo Scientifico 2010

Corso Sperimentale-PNI

PROBLEMI

PROBLEMA 1

• 1)

Q1-es) Il quesito è stato affrontato dal candidato

Q1-corr) Il quesito è stato corretto dal correttore

Q1-ok) La risposta al quesito è completa e corretta

Q1-a) Ricava l'espressione analitica delle tre semicirconferenze e della funzione $g(x)$

Q1-b) Trova la derivata della funzione $g(x)$

Q1-c) Individua i punti nella quale la $g(x)$ non è derivabile e ne fornisce un'esauriente spiegazione

Q1-d) I passaggi sono concatenati in modo coerente

Q1-e) Argomenta la risposta utilizzando coerentemente parole chiave proprie di un ragionamento logico-deduttivo

Q1-comm) Il correttore esprima un giudizio sulle capacità logico-argomentative emergenti dallo svolgimento del quesito

2)

Q2-es) Il quesito è stato affrontato dal candidato

Q2-corr) Il quesito è stato corretto dal correttore

Q2-ok) La risposta al quesito è completa e corretta

Q2-a) Mostra di conoscere correttamente le condizioni sotto le quali un punto è di massimo o di minimo

Q2-b) Trova il punto di massimo e il punto di minimo

Q2-c) I passaggi sono concatenati in modo coerente

Q2-d) Argomenta la risposta utilizzando coerentemente parole chiave proprie di un ragionamento logico-deduttivo

Q2-comm) Il correttore esprima un giudizio sulle capacità logico-argomentative emergenti dallo svolgimento del quesito

3)

Q3-es) Il quesito è stato affrontato dal candidato

Q3-corr) Il quesito è stato corretto dal correttore

Q3-ok) La risposta al quesito è completa e corretta

Q3-a) Comprende che $f(4)$ e $f(1)$ corrispondono al valore di integrali definiti

Q3-b) Mostra di capire qual è la regione di cui deve calcolare l'area individuata da $f(1)$

- Q3-c) Calcola $f(1)$
- Q3-d) I passaggi sono concatenati in modo coerente dal punto di vista logico
- Q3-e) Argomenta la risposta utilizzando coerentemente parole chiave proprie di un ragionamento logico-deduttivo
- Q3-f) Mostra di capire qual è la regione, di cui deve calcolare l'area, individuata da $f(4)$
- Q3-g) Calcola $f(4)$
- Q3-h) I passaggi sono concatenati in modo coerente
- Q3-i) Argomenta la risposta utilizzando coerentemente parole chiave proprie di un ragionamento logico-deduttivo
- Q3-comm) Il correttore esprima un giudizio sulle capacità logico-argomentative emergenti dallo svolgimento del quesito

4)

- Q4-es) Il quesito è stato affrontato dal candidato
- Q4-corr) Il quesito è stato corretto dal correttore
- Q4-ok) La risposta al quesito è completa e corretta
- Q4-a) Determina i punti nei quali f ha derivata seconda nulla
- Q4-b) Utilizzando la definizione di f data nel punto c), determina il segno di $f(x)$
- Q4-c) I passaggi sono concatenati in modo coerente
- Q4-d) Argomenta la risposta utilizzando coerentemente parole chiave proprie di un ragionamento logico-deduttivo
- Q4-e) Utilizzando la definizione di f data nel punto c), analizza qualitativamente l'andamento di $f(x)$
- Q4-f) I passaggi sono concatenati in modo coerente
- Q4-g) Argomenta la risposta utilizzando coerentemente parole chiave proprie di un ragionamento logico-deduttivo
- Q4-comm) Il correttore esprima un giudizio sulle capacità logico-argomentative emergenti dallo svolgimento del quesito

Coerenza interna delle diverse parti del Problema 1:

1. Le risposte alle diverse domande sono tra loro coerenti?
2. Trova modo di utilizzare per una domanda quanto trovato nelle precedenti?
3. Dopo aver risposto ad una domanda, modifica la figura per tener conto di quanto trovato?

PROBLEMA 2

1

- Q1-es) Il quesito è stato affrontato dal candidato
- Q1-corr) Il quesito è stato corretto dal correttore
- Q1-ok) La risposta al quesito è completa e corretta
- Q1-a) Disegna le due parabole
- Q1-b) Determina le coordinate dei fuochi e le equazioni delle rispettive direttrici
- Q1-c) Ricava i punti di intersezione delle due parabole e individua il punto A
- 1-d) I passaggi sono concatenati in modo coerente
- Q1-e) Argomenta la risposta utilizzando coerentemente parole chiave proprie di un ragionamento logico-deduttivo
- Q1-comm) Il correttore esprima un giudizio sulle capacità logico-argomentative emergenti dallo svolgimento del quesito

2)

- Q2-es) Il quesito è stato affrontato dal candidato
- Q2-corr) Il quesito è stato corretto dal correttore
- Q2-ok) La risposta al quesito è completa e corretta
- Q2-a) Riconduce il numero a uno dei tre problemi classici della geometria greca: la *duplicazione del cubo*
- Q2-b) Trova il valore approssimato mediante l'applicazione di un metodo iterativo di calcolo, soddisfacendo la precisione richiesta
- Q2-c) I passaggi sono concatenati in modo coerente
- Q2-d) Argomenta la risposta utilizzando coerentemente parole chiave proprie di un ragionamento logico-deduttivo
- Q2-comm) Il correttore esprima un giudizio sulle capacità logico-argomentative emergenti dallo svolgimento del quesito

3

- Q3-es) Il quesito è stato affrontato dal candidato
- Q3-corr) Il quesito è stato corretto dal correttore
- Q3-ok) La risposta al quesito è completa e corretta
- Q3-a) Individua sul disegno la parte di piano D
- Q3-b) Trova la funzione da massimizzare
- Q3-c) Individua il segmento di lunghezza massima
- Q3-d) I passaggi sono concatenati in modo coerente
- Q3-e) Argomenta la risposta utilizzando coerentemente parole chiave proprie di un ragionamento logico-deduttivo
- Q3-comm) Il correttore esprima un giudizio sulle capacità logico-argomentative emergenti dallo svolgimento del quesito

4)

- Q4-es) Il quesito è stato affrontato dal candidato**
- Q4-corr) Il quesito è stato corretto dal correttore**
- Q4-ok) La risposta al quesito è completa e corretta**
- Q4-a) Descrive o disegna il solido del cui volume si richiede il calcolo**
- Q4-b) Individua le forme delle 3 sezioni che si possono ottenere al variare della distanza dall'asse x del piano ortogonale**
- Q4-c) Trova la funzione il cui integrale permette di calcolare il volume**
- Q4-d) Esprime il volume richiesto mediante l'integrale della funzione**
- Q4-e) Calcola il volume**
- Q4-f) I passaggi sono concatenati in modo coerente**
- Q4-g) Argomenta la risposta utilizzando coerentemente parole chiave proprie di un ragionamento logico-deduttivo**
- Q4-comm) Il correttore esprima un giudizio sulle capacità logico-argomentative emergenti dallo svolgimento del quesito**

Coerenza interna delle diverse parti del Problema 2:

- 1. Le risposte alle diverse domande sono tra loro coerenti?**
- 2. Trova modo di utilizzare per una domanda quanto trovato nelle precedenti?**
- 3. Dopo aver risposto ad una domanda, modifica la figura per tener conto di quanto trovato?**

1. QUESITI

1.

- Q1-es) Il quesito è stato affrontato dal candidato
- Q1-corr) Il quesito è stato corretto dal correttore
- Q1-ok) La risposta al quesito è completa e corretta
- Q1-a) Mostra di conoscere la scrittura generica di un polinomio di grado n
- Q1-b) Calcola la derivata di un polinomio generico di grado n
- Q1-c) Riconosce la forma esplicita di $n!$
- Q1-d) I passaggi sono concatenati in modo coerente
- Q1-e) Argomenta la risposta utilizzando coerentemente parole chiave proprie di un ragionamento logico-deduttivo
- Q1-comm) Il correttore esprime un giudizio sulle capacità logico-argomentative emergenti dallo svolgimento del quesito

2.

- Q2-es) Il quesito è stato affrontato dal candidato
- Q2-corr) Il quesito è stato corretto dal correttore
- Q2-ok) La risposta al quesito è completa e corretta
- Q2-a) Mostra di capire la necessità di costruire il triangolo rettangolo nello spazio tridimensionale
- Q2-b) Riconosce graficamente che i triangoli PAB e PBC sono rettangoli in B
- Q2-c) Riconosce graficamente che il piano PCA non è perpendicolare al piano di ABC
- Q2-d) Mostra di capire che PCA è rettangolo in A
- Q2-e) I passaggi sono concatenati in modo coerente
- Q2-f) Argomenta la risposta utilizzando coerentemente parole chiave proprie di un ragionamento logico-deduttivo
- Q2-comm) Il correttore esprime un giudizio sulle capacità logico-argomentative emergenti dallo svolgimento del quesito

3.

- Q3-es) Il quesito è stato affrontato dal candidato
- Q3-corr) Il quesito è stato corretto dal correttore
- Q3-ok) La risposta al quesito è completa e corretta
- Q3-a) Trova l'equazione generica della retta tangente
- Q3-b) Imponendo il passaggio per l'origine, trova il valore di a
- Q3-c) Mostra di sapere che il coefficiente angolare di una retta coincide con la tangente trigonometrica dell'angolo che essa forma col semiasse positivo delle ascisse e trova il valore dell'angolo
- Q3-d) Esprime il risultato in gradi sessagesimali
- Q3-e) I passaggi sono concatenati in modo coerente dal punto di vista logico

Q3-f) Argomenta la risposta utilizzando coerentemente parole chiave proprie di un ragionamento logico-deduttivo

Q3-comm) Il correttore esprima un giudizio sulle capacità logico-argomentative emergenti dallo svolgimento del quesito

4.

Q4-es) Il quesito è stato affrontato dal candidato

Q4-corr) Il quesito è stato corretto dal correttore

Q4-ok) La risposta al quesito è completa e corretta

Q4-a) Calcola uno zero della funzione con un metodo di approssimazione

Q4-b) Mostra di conoscere un metodo che gli permetta di constatare l'unicità dello zero

Q4-c) Argomenta in maniera esaustiva i risultati ottenuti

Q4-d) I passaggi sono concatenati in modo coerente

Q4-e) Argomenta la risposta utilizzando coerentemente parole chiave proprie di un ragionamento logico-deduttivo

Q4-comm) Il correttore esprima un giudizio sulle capacità logico-argomentative emergenti dallo svolgimento del quesito

5.

Q5-es) Il quesito è stato affrontato dal candidato

Q5-corr) Il quesito è stato corretto dal correttore

Q5-ok) La risposta al quesito è completa e corretta

Q5-a) Mostra di conoscere le formule della simmetria assiale

Q5-b) Dichiarare esplicitamente in quale modo sia possibile dedurre o meno la simmetria

Q5-c) I passaggi sono concatenati in modo coerente

Q5-d) Argomenta la risposta utilizzando coerentemente parole chiave proprie di un ragionamento logico-deduttivo

Q5-comm) Il correttore esprima un giudizio sulle capacità logico-argomentative emergenti dallo svolgimento del quesito

6.

Q6-es) Il quesito è stato affrontato dal candidato

Q6-corr) Il quesito è stato corretto dal correttore

Q6-ok) La risposta al quesito è completa e corretta

Q6-a) Mette a sistema le equazioni parametriche, eliminando il parametro t

Q6-b) Mediante la relazione fondamentale della trigonometria trova l'equazione dell'ellisse

Q6-c) Riconosce che si tratta dell'equazione di un'ellisse

Q6-d) I passaggi sono concatenati in modo coerente

Q6-e) Argomenta la risposta utilizzando coerentemente parole chiave proprie di un ragionamento logico-deduttivo

Q6-comm) Il correttore esprima un giudizio sulle capacità logico-argomentative emergenti dallo svolgimento del quesito

7.

Q7-es) Il quesito è stato affrontato dal candidato

Q7-corr) Il quesito è stato corretto dal correttore

Q7-ok) La risposta al quesito è completa e corretta

Q7-a) Mostra di capire che il quesito si risolve mediante la formula della probabilità condizionata

Q7-b) Conosce la formula della probabilità condizionata

Q7-c) Attribuisce valori corretti ad ogni quantità probabilistica

Q7-d) I passaggi sono concatenati in modo coerente

Q7-e) Argomenta la risposta utilizzando coerentemente parole chiave proprie di un ragionamento logico-deduttivo

Q7-comm) Il correttore esprima un giudizio sulle capacità logico-argomentative emergenti dallo svolgimento del quesito

8.

Q8-es) Il quesito è stato affrontato dal candidato

Q8-corr) Il quesito è stato corretto dal correttore

Q8-ok) La risposta al quesito è completa e corretta

Q8-a) Mette in relazione i tre termini della progressione aritmetica, mostrando di conoscere la proprietà che lega tre termini successivi

Q8-b) Mostra di conoscere la definizione di coefficiente binomiale ed esplicita i termini

Q8-c) Calcola l'equazione di secondo grado in n

Q8-d) I passaggi sono concatenati in modo coerente

Q8-e) Argomenta la risposta utilizzando coerentemente parole chiave proprie di un ragionamento logico-deduttivo

Q8-comm) Il correttore esprima un giudizio sulle capacità logico-argomentative emergenti dallo svolgimento del quesito

9.

Q9-es) Il quesito è stato affrontato dal candidato

Q9-corr) Il quesito è stato corretto dal correttore

Q9-ok) La risposta al quesito è completa e corretta

Q9-a) Applica il teorema dei seni

Q9-b) Deduce la non-esistenza del triangolo tramite il teorema dei seni

Q9-c) I passaggi sono concatenati in modo coerente dal punto di vista logico

Q9-d) Argomenta la risposta utilizzando coerentemente parole chiave proprie di un ragionamento logico-deduttivo

- Q9-e) Applicando il teorema dei seni alla nuova situazione, ne deduce che è possibile ricavare l'ampiezza dei due angoli, quindi l'esistenza dei due triangoli**
- Q9-f) Trova, tramite le formule trigonometriche inverse, il valore dei due angoli**
- Q9-g) I passaggi sono concatenati in modo coerente**
- Q9-h) Argomenta la risposta utilizzando coerentemente parole chiave proprie di un ragionamento logico-deduttivo**
- Q9-comm) Il correttore esprima un giudizio sulle capacità logico-argomentative emergenti dallo svolgimento del quesito**

10.

- Q10-es) Il quesito è stato affrontato dal candidato**
- Q10-corr) Il quesito è stato corretto dal correttore**
- Q10-ok) La risposta al quesito è completa e corretta**
- Q10-a) Mostra (non necessariamente svolgendo i calcoli) che l'integrale presente nel testo del quesito non si ottiene calcolando i volumi delle figure indicate nei punti a), c), d)**
- Q10-b) I passaggi sono concatenati in modo coerente**
- Q10-c) Argomenta la risposta utilizzando coerentemente parole chiave proprie di un ragionamento logico-deduttivo**
- Q10-d) Mostra che calcolando il volume del solido indicato nel punto b) si ottiene l'integrale indicato nel testo**
- Q10-e) I passaggi sono concatenati in modo coerente**
- Q10-f) Argomenta la risposta utilizzando coerentemente parole chiave proprie di un ragionamento logico-deduttivo**
- Q10-comm) Il correttore esprima un giudizio sulle capacità logico-argomentative emergenti dallo svolgimento del quesito**

Allegato 5

La maschera trasversale

OSSERVAZIONI SUL COMPITO NEL SUO COMPLESSO

Impostazione e articolazione complessiva dello svolgimento

T1)

Dichiara esplicitamente, all'inizio dello svolgimento o nel corso della risoluzione, cosa sta facendo?

(es.: cerchiamo il valore del limite; questo è il grafico della funzione;..)

T2)

Enuncia esplicitamente le strategie di risoluzione che adotta?

(es.: calcoliamo il limite facendo una sostituzione; riconduciamo il calcolo a un limite notevole; per trovare i punti di massimo cerchiamo dove si annulla la derivata;.....)

T3)

Utilizza ordinatamente i dati forniti nel testo?

(ad esempio, non arriva a una risposta perché non sa come utilizzare qualche informazione)

T4)

Risponde esplicitamente alle consegne poste?

(può succedere che vengano fatti calcoli da cui segue la risposta alla consegna, ma questa non è esplicitamente dichiarata: ad esempio, occorre determinare i punti di massimo e minimo, e lo studente calcola gli zeri della derivata e non dice altro)

T5)

Il testo nel suo complesso è organizzato adeguatamente?

(è chiaro, senza ripetizioni, senza salti repentini di registro,...)

Uso corretto sintatticamente degli strumenti specifici della matematica (tecniche e

strumenti di calcolo, argomentazioni, rappresentazioni,....)

G1)

Cita correttamente dei teoremi nel corso delle argomentazioni?

G2)

Utilizza argomentazioni grafiche?

G3)

Utilizza correttamente, anche solo verbalmente, connettivi logici (se...allora)?

G4)

Utilizza correttamente, anche solo verbalmente, i quantificatori? (per ogni, esiste...)

G5)

Mostra di utilizzare ove opportuno strumenti di calcolo?

G6)

Sceglie in modo pertinente esempi e controesempi, a sostegno delle proprie affermazioni?

G7)

Sono presenti calcoli inutili?

Disponibilità di risorse specifiche del linguaggio matematico

L1)

C'è una coerenza complessiva nell'uso della terminologia e dei simboli?

(ad esempio, può succedere che un termine sia usato con significati diversi in esercizi diversi: per esempio, "integrale" significa l'integrale definito in un esercizio e l'integrale indefinito in un altro)

L2)

Utilizza i simboli dei connettivi e dei quantificatori?

L3)

Utilizza rappresentazioni tabellari?

L4)

Richiama esplicitamente delle definizioni?

L5)

Utilizza correttamente nel contesto del problema matematico il linguaggio naturale?

L6) C'è uso improprio di linguaggio "matematico"?